Corrigé du DS 1.

Exercice 1.

① On a $\left|\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\right|^{1/n} = 1+\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Le rayon de convergence est donc égal à 1 par le critère de Cauchy.

② P est un polynôme complexe non nul.
Soit $N \geqslant 0$ son degré et $a_0 \dots a_N \in \mathbb{C}$ ses coefficients : $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_NX^N$ avec $a_N \neq 0$.

Calculons $\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{a_0 + \dots + a_N(n+1)^N}{a_0 + \dots + a_N n^N}$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^N}{n^N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Par le critère de Dirichlet, le rayon de convergence est égal à 1.

Exercice 2.

① On va montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n' : x \mapsto 2e^{-n^4t^2}(1-2n^4t^2)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}n^2}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}n^2}$		$+\infty$
f_n'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

- Le tableau de variation de f_n donne que $\forall x \in \mathbb{R}$, ~~$\forall x$~~ $|f_n(x)| \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n^2}\right)$
$$\shortparallel$$
$$\sqrt{2}\,\frac{1}{n^2}\,e^{-1/2}$$

- $\sqrt{2}\,e^{-1/2}\,\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente (car c'est en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$)

Donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

② $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est une série des fonction continues qui converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$: F est donc continue sur $\mathbb{R}$.

③ Soit $A > 0$.
$\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, A]$ vers F.

On a donc $\displaystyle\int_0^A F(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^A f_n(t)\,dt$

- Soit $n \geq 1$, on calcule donc

$$\int_0^A f_n(t)\,dt = \int_0^A 2t\,\exp(-n^4 t^2)\,dt$$
$$= \left[\frac{-1}{n^4}\exp(-n^4 t^2)\right]_0^A$$
$$= \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^4}\,e^{-n^4 A^2}$$

d'où $\displaystyle\int_0^A F(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\,e^{-n^4 A^2}$

(les deux séries étant convergentes).

Il reste donc à montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^4 A^2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$

On a de manière évidente

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^4 A^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} e^{-A^2} = e^{-A^2} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \right)}_{\text{constante}}$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 .$$

Ce qui conclut la preuve.

__Exercice 3.__

① On cherche une solution à ϕ sur $]-1,1[$ de la forme $\phi(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}_{\substack{\text{série entière} \\ \text{de RCV} \geqslant 1}}$, telle que $\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi'(1) = -1 \end{cases}$.

• ~~Pour que~~

• Soit ϕ une telle solution.

On a donc $a_0 = \phi(0) = 0$

$a_1 = \phi'(0) = -1$

Pour tout $x \in]-1,1[$, $\phi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

On a donc pour $x \in]-1,1[$:

$$x \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \ln(1-x) + x = 0$$

On a aussi $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (n-1) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x = 0$$

On identifie maintenant les coefficients par :

- $n=0$: $a_0(0-1) = 0$ (on savait déjà que $a_0 = 0$)
- $n=1$: $a_1(1-1) - 1 + 1 = 0$
  donc $0 = 0$
- $n \geqslant 2$: $a_n(n-1) - \frac{1}{n} = 0$

donc $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$

Conclusion : $\phi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} - x$.

- On pose donc $\phi : x \in]-1,1[\longmapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} - x$.

ϕ est bien une série entière de rayon de convergence égal à 1 (par critère de Dirichlet) et qui vérifie, par construction, les conditions souhaitées.

② Soit $x \in]-1,1[$

$$\phi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) x^n - x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$= -x\ln(1-x) + \ln(1-x)$$

$$= \ln(1-x)(1-x).$$

Exercice 4.

① S converge normalement sur $C(0,1)$ donc
$\sum_{n\geq 0} |a_n 1^n|$ converge donc $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in D(0,1)$
$$|a_n z^n| \leq \underbrace{|a_n|}_{\text{terme générale d'une série convergente.}} \quad (\text{car } |z| \leq 1)$$
$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge donc normalement sur $\overline{D(0,1)}$

②. S converge uniformément sur $C(0,1)$, par le critère de Cauchy uniforme, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq p \geq n_0$ et tout $z \in C(0,1)$
$$|S_{p,q}(z)| \leq \varepsilon.$$

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. $e^{i\theta} \in C(0,1)$ donc
$$|S_{p,q}(e^{i\theta})| \leq \varepsilon.$$

③ On applique une transformation d'Abel :
$$\sum_{n=p}^{q} a_n z^n = \sum_{n=p}^{q} a_n e^{in\theta} r^n$$
$$= \sum_{n=p}^{q} \left(S_{p,n}(e^{i\theta}) - S_{p,n-1}(e^{i\theta})\right) r^n \quad \left(\text{avec la convention } S_{p,p-1} = 0\right.$$
$$= \sum_{n=p}^{q} S_{p,n}(e^{i\theta}) r^n - \sum_{n=p}^{q} S_{p,n-1}(e^{i\theta}) r^n$$
$$= \sum_{n=p}^{q} S_{p,n}(e^{i\theta}) r^n - \sum_{n=p}^{q-1} S_{p,n}(e^{i\theta}) r^{n+1}$$
$$= \sum_{n=p}^{q} S_{p,n}(e^{i\theta}) (r^n - r^{n+1}) + S_{q,n}(e^{i\theta}) r^{q+1}$$

④ On reprend le ε et le n_0 de la question
② . On a alors, pour $q \geqslant p \geqslant n_0$:

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n z^n \right| = \left| \sum_{n=p}^{q} S_{p,n}(e^{i\theta})(r^n - r^{n+1}) + S_{p,q}(e^{i\theta}) r^{q+1} \right|$$

$$\text{(inégalité triang.)} \leqslant \sum_{n=p}^{q} |S_{p,n}(e^{i\theta})| (r^n - r^{n+1}) + |S_{p,q}(e^{i\theta})| r^{q+1}$$

$$\text{(question 2)} \quad \leqslant \varepsilon \left(\sum_{n=p}^{q} (r^n - r^{n+1}) + r^{q+1} \right)$$

$$= \varepsilon r^p \leqslant \varepsilon .$$

La série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ vérifie donc le critère de Cauchy uniforme sur $\overline{D(0,1)}$: elle converge uniformément sur $\overline{D(0,1)}$.

BONUS.

① On vérifie facilement que $f : x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ convient.

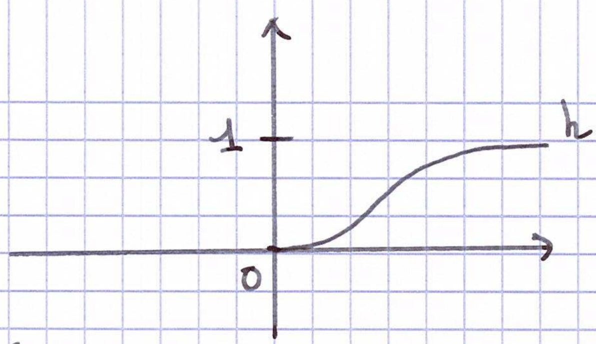
② On considère $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $\begin{cases} h^{(k)}(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 \\ h^{(k)}(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \end{cases}$ même limites !

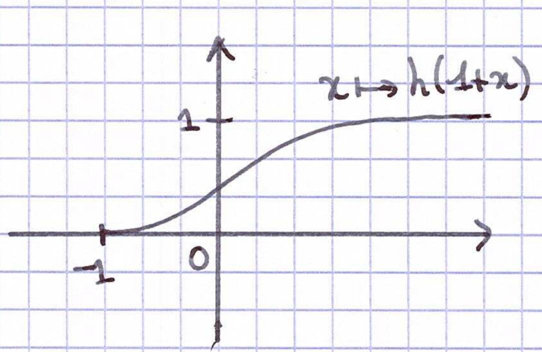
h est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

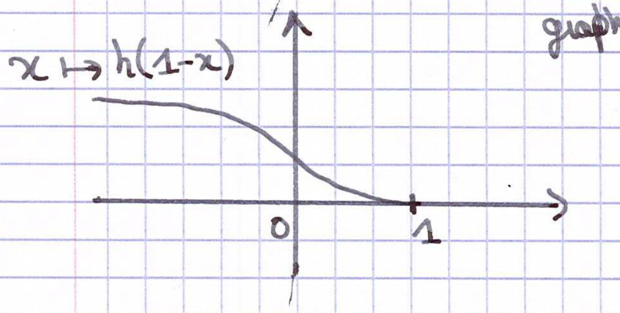


Graphe de la fonction h.

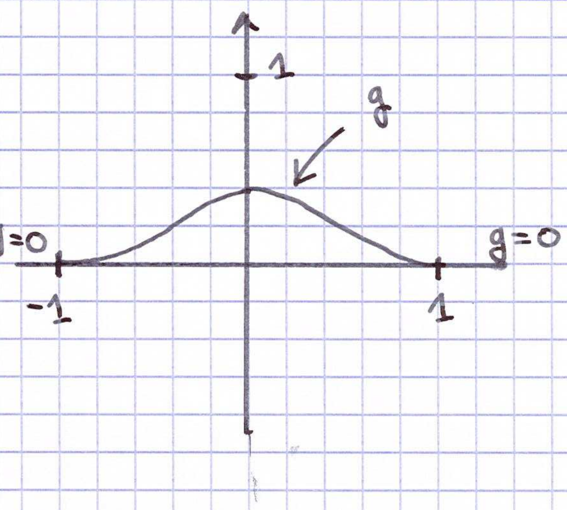
À partir de h, on va former une "bosse"

On pose $g : x \mapsto h(1+x) \times h(1-x)$





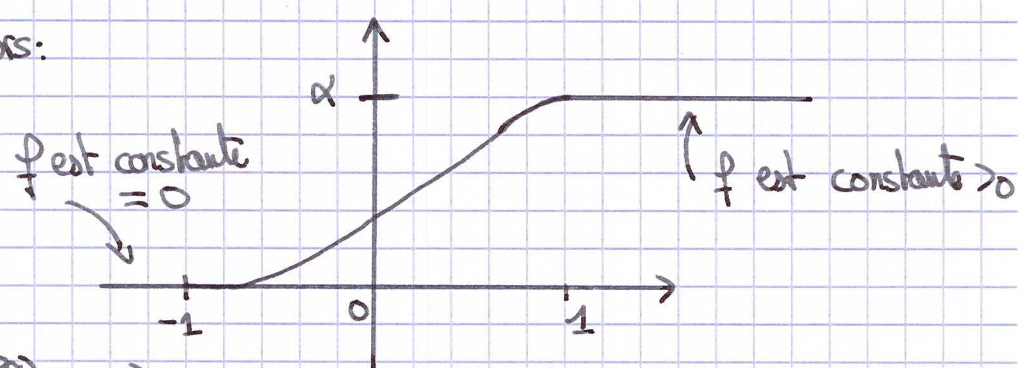
graphe de g



- g est donc $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive sur $]-1,1[$, nulle en dehors.

- On pose maintenant $f : x \mapsto \int_{-1}^{x} g(t)\,dt$

On a alors:



- f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

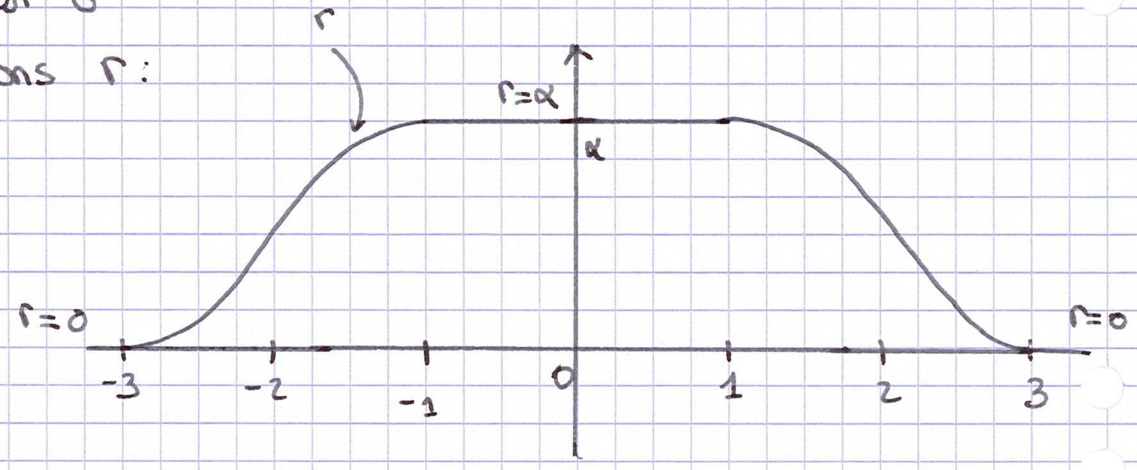
on pose $\alpha = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ $\left(\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \alpha \right)$

- On pose maintenant

$$r : x \longmapsto f(x+2) + f(2-x) - \alpha$$

r est $\mathcal{C}^\infty$

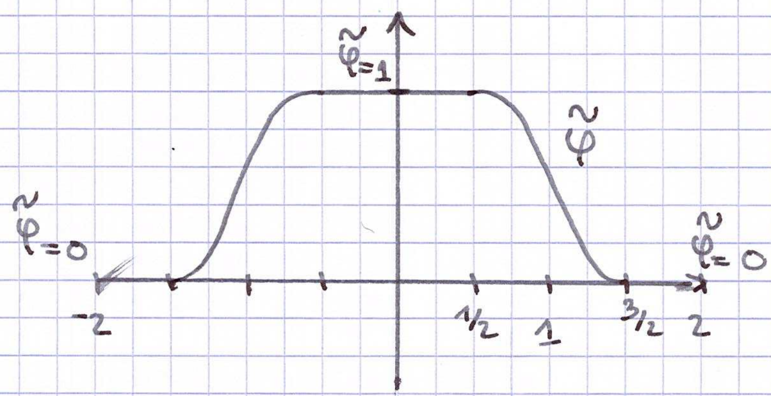
traçons r :



Il ne reste plus qu'à "remettre r à l'échelle"

On pose $\tilde{\varphi} : x \longmapsto \frac{1}{\alpha} r(2x)$ <u>$\tilde{\varphi}$ est $\mathcal{C}^\infty$</u>

On a alors



$\tilde{\varphi}$ est $\mathcal{C}^\infty$. $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\tilde{\varphi}(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus]-2, 2[$, $\tilde{\varphi}(x) = 0$

→ on obtient facilement φ à partir de $\tilde{\varphi}$ ....