2M261 2016-2017

Devoir à la maison

Amphi A TD 2

Exercice 1: La fonction exponentielle.

1. Montrez que la série entière complexe $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On note $\exp(z)$ sa somme. On définit ainsi la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$.
2. Justifiez que $x \mapsto \exp(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrez que $\exp' = \exp$.
3. Montrez que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$. (*Indication: pensez au produit de Cauchy*)
4. Montrez que $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En déduire que $|\exp(it)| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
5. On définit, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(\exp(i\theta))$ et $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(\exp(i\theta))$. Montrez que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$
$$\sin(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{et} \qquad \cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$$
6. Vérifiez que sin et cos sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Exercice 2: Série de fonctions.

On considère la série de fonction $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$

1. Montrez que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.
2. Montrez que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide. Montrez que la série ne converge pas normalement sur A.
4. Montrez que la somme de la série est dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminez la limite de $S(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 3: Formule de Cauchy, thèorème de Liouville

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

1. Soit $r \in]0, R[$, montrez
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$
2. Application (théorème de Liouville): on suppose que $R = +\infty$. Montrez que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante.
3. Ce dernier résultat subsiste-t-il si l'on suppose seulement f bornée sur $\mathbb{R}$?

Remarque: le théorème de Liouville permet de montrer facilement le théorème de d'Alembert-Gauss, à savoir "un polynôme complexe non constant admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$". Pour le démontrer, on procède par l'absurde en considérant un polynôme P non constant ne s'annulant pas sur $\mathbb{C}$. On peut alors montrer que $z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. P est non constant donc $|P(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} +\infty$. On en déduit que $\frac{1}{P}$ est bornée sur $\mathbb{C}$ et donc constante par le théorème de Liouville, ce qui est absurde!

Exercice 4: Zéros et convergence uniforme.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ convergent uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$. On suppose que chaque fonction f_n admet un zéro sur $[a, b]$. Montrez que f admet un zéro sur $[a, b]$.

Exercice 5: Unicité des coefficients et principe des zéros isolés.

Soit $S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série réelle complexe de rayon de convergence $\rho > 0$.

1. On suppose dans cette question qu'il existe $0 < r < \rho$ tel que S est nulle sur le disque ouvert $B(0, r)$. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$.
2. En déduire que si deux séries entières sont égales sur un disque centré en 0 de rayon strictement positif, alors leurs coefficients sont égaux.
3. On suppose maintenant qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $B(0, \rho) \setminus \{0\}$, convergent vers 0. On suppose en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(x_n) = 0$. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$. (*Indication: on pourra raisonner par l'absurde et considérer le plus petit $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \neq 0$*).

Exercice 6: Dénombrement et séries entières.

Le but de cet exercice est de calculer $a(k, n) = \#\big\{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k \mid i_1 + \cdots + i_k = n\big\}$, pour $n, k \geq 1$.

1. Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ on a

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} a(k, n) z^n$$

(*Indication: utilisez le produit de Cauchy*)

2. En développant $(1 - z)^{-k}$ en série entière d'une autre façon, calculer $a(k, n)$ en fonction de n et k. (*On pourra utiliser le résultat de la question 2 de l'exercice 5*)