Corrigé

Exercice 1: Contre-exemples.

1. Considerons l'exemple suivant, proposé par Pauline. On considère l'espace mesurable $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, muni de la mesure de Lebesgue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & n\,\mathbf{1}_{[0,1/n]}(x)\,. \end{array}$$

f_n est bien mesurable, car continue par morceaux. Soit $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0\,, \\ +\infty & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

$(f_n)_{n\geq 1}$ converge donc Lebesgue-presque partout vers la fonction nulle (l'ensemble des points où cela n'est pas vérifié est le singleton $\{0\}$ qui a une mesure de Lebesgue nulle). La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ vérifie donc les hypothèses du théorème de convergence dominée, à l'exception de celle de domination. On a par ailleurs,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = n \times \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \int_0^1 0\,dx\,.$$

2. La même suite $(f_n)_{n\geq 1}$ convient également.

3. En considérant la suite $(g_n)_{n\geq 1} = (-f_n)_{n\geq 1}$ on a

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} g_n(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0 > -1 = \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx\,.$$

Exercice 2

On se donne un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, f et $(f_n)_{n\geq 0}$ des fonctions intégrables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\int_E |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \qquad (\Delta)$$

1. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de Markov, on a

$$\mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_E |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\mu(\{|f_n - f| > \frac{1}{2^k}\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Il existe donc $n_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_k,\ \mu\left(\left\{|f_n - f| > \frac{1}{2^k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}\,.$$

On ne peut par pour autant choisir $\phi(k) = n_k$, car rien ne nous dit que la suite $(n_k)_k$ est strictement croissante. Pour contourner cela on définit ϕ par la récurrence suivante:

$$\begin{cases} \phi(0) = n_0 \\ \phi(k) = \max(\phi(k-1), n_k) + 1 \quad \text{pour } k \geq 1\,. \end{cases}$$

ϕ est évidement strictement croissante et convient bien car $\forall k \in \mathbb{N}$, $\phi(k) \geq n_k$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$A = \limsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{j\geq 0}\bigcup_{k\geq j} A_k \subset \bigcup_{k\geq n} A_k\,.$$
D'où, par croissance et sous-σ-additivité,
$$0 \leq \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n}\mu(A_k) \leq \sum_{k\geq n}\frac{1}{2^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

4. $\mu(A) = 0$, il suffit donc de montrer que $(f_{\phi(k)})_{k\geq 0}$ converge (simplement) vers f sur A^c. On a
$$A^c = \bigcup_{j\geq 0}\bigcap_{k\geq j} A_k^c\,.$$
Soit $x \in A^c$. Il existe donc un rang $j \geq 0$, tel que $x \notin A_k$ pour tout $k \geq j$. Donc pour tout $k \geq j$,
$$|f_{\phi(k)}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^k}$$
ce qui donne que $f_{\phi(k)}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$.

5. h est mesurable positive, comme limite simple de fonctions mesurables positives.
$$\begin{aligned}
\int_E h d\mu &= \int_E \sum_{k=0}^{+\infty} |f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}|\, d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_E |f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}|\, d\mu \qquad \text{(car toutes les termes sont positifs)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty}\int_E |f_{\phi(k+1)} - f| d\mu + \int_E |f - f_{\phi(k)}|\, d\mu \qquad \text{(par inégalité triangulaire)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} < \infty\,.
\end{aligned}$$
h est donc intégrable.

6. Soit $K \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire et "télescopage" on a
$$h \geq \sum_{k=0}^{K} |f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}| \geq \sum_{k=0}^{K} |f_{\phi(k+1)}| - |f_{\phi(k)}| = |f_{\phi(K+1)}| - |f_{\phi(0)}|\,.$$
D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|f_{\phi(k)}| \leq h + |f_{\phi(0)}|$ (on a montré cette inégalité pour $k \geq 1$ et pour $k = 0$ elle est évidente). $g = h + |f_{\phi(0)}|$ (qui est bien intégrable car h et $f_{\phi(0)}$ le sont) convient.